Modeller
i matematikundervisning

af Flemming Nielsen

”Man skal tage højden af korthuset og sætte den i anden og gange med to. Herefter skal man tage antallet af trekanter ovenover og trække fra”.

Et scenarie
Onsdag morgen, matematik i 10. klasse. Planen for første del af timen er afklaring af problemer med et prøveopgavesæt, der skulle afleveres dagen efter. I en af opgaverne skal eleverne beskrive en sammenhæng - den type opgaver, hvor eleverne får lejlighed til at demonstrere, at de er i stand til at få øje på matematikken og håndterer de matematiske begreber selvstændigt.

Dorte synes, at denne opgavetype er vanskelig, og synes bestemt ikke, at det bliver lettere, ”når man bare sådan selv skal finde på noget. Og hvordan øver man sig på den type opgaver”?

Jeg prøver: ”Du skal se dig omkring, få øje på et eller andet – det må gerne være lidt vanvittigt – og så skal du forsøge at finde frem til forskellige matematiske måder at beskrive det. Det vigtigste er, at du forsøger at anvende nogle af de matematiske ord og begreber du kender.”

Jeg ser mig om i lokalet – nu havde jeg givet bolden op, og jeg måtte forsøge at holde den i luften. På Jacobs bord ligger et spil kort. ”Er der matematik i et spil kort”?
Gitte foreslår, at man kan lave noget med sandsynlighed.
”Hvordan kan man vinde i kortspil?”

Andreas foreslår med et lunt smil, at man kan bygge korthuse.

Matematikken i et korthus blev afsættet for arbejdet i resten af det modul.

Eleverne går i gang med at foreslå, hvad man kan lave af matematik med et korthus:
- ”Med et korthus kan man lave noget med vinkler i trekanterne”.
- ”Noget med hvor højt et korthus bliver, så kan man vise noget med Pythagoras”.
- ”Symmetriakser”

Jeg bryder ind: ”Findes der en sammenhæng mellem antallet af kort, der bruges til byggerier og højden af korthuset?

Jeg tegner en model af et korthus, og på baggrund af denne tegning, også en tabel.

Tabeller er nok det mest fremragende stykke værktøj, der findes, når man skal skaffe sig et overblik over en sammenhæng mellem forskellige talværdier, og dermed er tabeller ofte forudsætningen for, at der opstår idéer til, hvordan en problemstilling skal gribes an.. Her er en endnu passende lejlighed, der ikke må forspildes, til at minde eleverne om denne mulighed. Endvidere giver det mig tid, for jeg har stadig ikke fundet løsningen til den opgave jeg netop havde stillet.

Korthusets højde	Forbrug af kort
1	2
2	7
3	15
4	26
5	40
6	

Jeg prøver igen: ”Er der er sammenhæng mellem disse tal? Er det muligt at regne sig frem til antallet af kort, der skal bruges, hvis man bygger et korthus, der er 6 kort højt, hvis korthuset da ikke for længst er styrtet sammen?”

Efter et par minutter har Lasse og Anton hånden i vejret.

”Man starter med 2. Herefter skal man, hver gang huset bliver højere, lægge 1,5 til og gange med korthusethusets højde”.

Jeg beder dem om at gentage og får samme svar.

”Vil I lige skrive det på tavlen”.

Det vil de godt:

1: 2
2: $3{,}5 \cdot 2 = 7$
3: $5 \cdot 3 = 15$
4: $6{,}5 \cdot 4 = 26$
5: $8 \cdot 5 = 40$
6: $9{,}5 \cdot 6 = 57$

Jacob er i mellemtiden kommet frem til en anden måde at beskrive udviklingen på:

”Man skal tage højden af korthuset og sætte det i anden og gange med to. Herefter skal man tage antallet af trekanter oven over, og trække fra”.

Dette udsagn må jeg også have op på tavlen, før jeg forstår, hvad det var, han siger.

1: $1^2 \cdot 2 - 0 = 2$
2: $2^2 \cdot 2 - 1 = 7$
3: $3^2 \cdot 2 - 3 = 15$
4: $4^2 \cdot 2 - 6 = 26$
2: $5^2 \cdot 2 - 10 = 40$
2: $6^2 \cdot 2 - 15 = 57$

Stig sidder nu også med hånden i vejret:

”Jeg ved ikke, om det er en vækstfunktion eller en andengradsfunktion. Hvis man på forhånd kender funktionstypen er det muligt at finde forskriften i Excel”.

Tidligere på året havde vi gennemført forløbet ”Matematik Morgener (se boks 1). Theis havde sammen med Stig arbejdet med energiindholdet i en krydderbolle. De ønskede at undersøge, om energien i en krydderbolle kunne forbrændes under cykelturen til skolen om morgenen.

Dengang havde Theis og Stig fundet en tabel i en fysikbog, der angav sammenhængen mellem energiforbrug og den hastighed, hvormed man cykler.

Tabellen indeholdt kun nogle ganske få tal, som de ikke kunne bruge. Derfor måtte de finde frem til den formel, der bandt tallene i tabellen sammen.

Dengang var vi blevet enige om, at sammenhængen sandsynligvis var en andengradsfunktion, og ved hjælp af funktinsprogrammet kunne Stig og Theis eksperimente sig frem til et matematisk udtryk, der på rimelig måde beskrev sammenhængen mellem de få opgivne tal.

I det produkt Theis og Stig afleverede, indgik et regneark, hvor det er muligt få opgivet, hvor stærkt man skal køre, når man kender længden og den energimængde, man ønsker at forbrænde på en cykeltur.

Under dette arbejde fandt Stig og Theis en funktion i Excel, hvor det er muligt at få tegnet tendenslinjer (se boks 5) for sammenhængende observationssæt med tilhørende ligninger.

I mellemtiden har jeg selv fundet endnu en matematisk model (se boks 2), der kunne beskrive sammenhængen mellem antallet af kort og korthusets højde. Med mit og de forslag eleverne selv havde udtænkt, begynder eleverne arbejdet med at oversætte (matematisere) modellerne til et sprog, som datamaskinerne kan forstå. Opgaven er nu at bruge datamaskinen som redskab til at finde frem til hvor mange kortspil, der bruges til et korthus, der er tyve kort højt.

Modelbygning og funktionsbegreber
Når man opstiller en model af en situation fra virkeligheden, foretager man næsten altid en forenkling. Virkeligheden er så rig på detaljer, at man umuligt kan lade modellen gengive dem alle. For at få det vigtigste frem i et emne, bruges gerne en forenklet model. Det være sig i biologi med plastmodeller af indre organer, mekaniske modeller i naturfag, billeder og plancher, tankemodeller (diverse forklaringsmodeller for naturfaglige sammenhænge - magnetisme, kemi osv.), litteraturmodeller mm.
Det er vigtigt at gøre sig klart, at modeller er forenklinger af virkeligheden, dvs. at man mere eller mindre bevidst har udeladt en række detaljer. Netop fordi denne række af detaljer er udeladt, er det muligt at få en oversigt over/indsigt i grundlæggende egenskaber i det virkelige system. Ofte er det netop denne forenkling, der gør modellen til et nyttigt værktøj.
I forenklingen ligger imidlertid også en fare. Modellen kan gengive virkeligheden i en så forenklet form, at for mange af de betydende faktorer er forsvundet.
Ved inddragelse af modeller i undervisningen, er det derfor vigtigt, at eleverne gør sig overvejelser om en models grad af forenkling, ligesom graden af sikkerhed/usikkerhed skal overvejes. Hertil kommer, at modellen kan være farvet af holdningen hos den, der har opstillet modellen.

Kathrine ønskede at fortælle om størrelsen af forskellige bjerge og høje. For at gøre dette visuelt fremstillede hun en række pyramideformede kegler, der illustrerer dette forhold. Kathrines model er en statisk model. Dvs. modellen forandrer sig ikke. I modsætning til Kathrines statisk model, er den dynamiske model karakteriseret ved, at en eller flere komponenter forandrer sig med tiden. En sådan model kan beskrives matematisk.
En matematisk model opstår med udgangspunkt i et fænomen, man ønsker at få indsigt i. Gennem den matematisk model oversættes træk af virkeligheden til matematikkens sprog og udtrykkes i tal, variable, funktioner og formler. I modellen kan man derefter benytte matematikkens metoder til at nå frem til en matematisk løsning af det forelagte problem fra virkeligheden.

For at arbejde med modeller og modelbygning skal eleverne være fortrolige med funktionsbegrebet. Et absolut minimum er, at de oplever en funktion som en maskine. En maskine, hvor man putter et tal ind i den ene ende. Maskinen gør noget ved tallet og der kommer det samme eller et andet tal ud i den anden ende. Eleverne skal også vide, at en funktion kan beskrives trinvist ved hjælp af forgængeren i en talfølge. Den sidste metode er intuitivt lettere at gå til for eleverne. Det var fx den funktionstype Jacob, Lasse og Anton benyttede, i deres måde at beskrive sammenhængen mellem antallet af kort og højden af korthuset. Det er i øvrigt den metode eleverne kender fra det indledende arbejde med funktionsbegrebet, hvor eleverne opfordres til at finde systematikken i talfølger.

Det er min erfaring, at det er vigtigt at holde fast i begge metode, når eleverne skal arbejde med modelbygning, hvor matematikkens begreber bliver anvendt til beskrivelse af et praktisk eller konkret problem. Dels tænker eleverne forskelligt, og derfor skal de have lejlighed til at arbejde med et bredt sæt af værktøjer. Dels er det nødvendigt, at eleverne har en indsigt i begge måder at arbejde med funktioner på, ikke mindst, når it indgår i den matematisk modelbygning.
Det er min påstand, at modelbygning og dermed elevernes mulighed for at arbejde konkret med funktioner i grundskolen først er blevet en reel mulighed efter indførslen af it i matematikundervisningen. Ved at inddrage it i den matematiske modelbygning bliver it en integreret del af matematikundervisningen, fordi brugen af it i det matematiske modelarbejdet på samme tid er undervisning i, om og med it.

Modelbygning
Modelbygning i matematikundervisningen bygger i mange tilfælde på elementære matematiske begreber og tidskrævende regnearbejde
Det er også min påstand, at det muligt at komme langt med et regneark og et funktionsprogram, når it integreres i arbejdet med modelbygning i matematikundervisningen.
I grundskolen er der forventninger om, at eleverne beskæftiger sig med matematik, der byger på de fire regningsarter, potenser og regningsarternes hierarki.

Dette betyder, at elevernes indsigt i matematik er yderst begrænset. Ved inddragelse af it er det imidlertid muligt at lade maskinerne tage sig af det trivielle regnearbejde. Hver gang eleverne ændrer i forudsætningerne er de sparret for at gentage det besværlige og tidskrævende regnearbejde. Dermed er der skabt mulighed for, at eleverne - selv med deres meget begrænsede viden om matematik - kan bruge deres energi på at tænke matematik og ikke mindst eksperimentere med endog særdeles vanskelige matematiske problemstillinger. Det være sig undersøgelse af forskellige former for afbetalingskøb, sammenhæng mellem overflade og rumfang for forskellige geometriske figurer, undersøgelse af forudsætninger for færdselskampagnen ”10= 44”, som Rådet for større

Færdselssikkerhed afviklede for et par år siden eller et pludseligt indfald, der gjorde kort og korthuse til omdrejningspunkt for arbejde med matematik.

Når eleverne skal arbejde med matematiske sider af et konkret/praktisk problem, er der flere forhold, de skal inddrage. Bl.a. skal de gøre sig klart, om den beskrivelsesform, de vælger, er den sædvanlige funktion (en funktionsmaskine), eller den funktionstype, der bygger på en talfølge, hvor efterfølgeren fremkommer ved gentagende fremskrivninger af forgængeren. Elevernes valg af funktionstype er nemlig bestemmende for, om de skal vælge at bruge et funktionsprogram eller et regneark som elektronisk hjælpemiddel.
Hvis de vælger at beskrive den sammenhæng, de arbejder med som en sædvanlig funktion af typen: (f(x) = et udtryk med x som variabel), er det oplagt, at de vælger at bruge et funktionsprogram. Det kunne eksempelvis være i forbindelse med løsning af opgaver, hvor der skal fremstilles æsker med størst mulig rumfang (se boks 3).
Hvis problemet imidlertid ses som en konsekvens af en dynamisk udvikling, hvor den øjeblikkelige situation er bestemt af forgængeren i en talrække, vil det være oplagt, at eleven vælger at benytte et regneark som hjælpemiddel, idet formlerne i et regneark muliggør, at nye værdier kan bestemmes ved gentagende fremskrivninger af forgængeren.
Her kunne afsættet for modelarbejdet have været en matematisk beskrivelse (model) af udviklingen i en rådyrpopulation (se boks 4).

Hvorfor lade eleverne arbejde med modeller i matematik?
Også i faget matematik er det utrolig vigtig, at eleverne får lejlighed til at arbejde i grupper på to til tre elever. Herved får de mulighed for, at reflektere og udveksle idéer, synspunkter, erfaringer, oplevelser.. mens de arbejder. Der opstår en dialog mellem eleverne, og gennem denne dialog bruger de sproget, der nok er det vigtigste erkendelsesredskab. Når eleverne samarbejder med modelbygning i matematik, det være sig med papir og blyant eller ved computeren, opstår situationer, hvor eleverne nødvendigvis må formulere sig om idéer og tanker. Ved at organisere undervisningen således, vil eleverne bruge sproget langt mere intensivt - også til at tale om matematik - end det er muligt i de mere lærerstyrede samtaler i klassen.
Endvidere vil eleverne opleve, at de kan bruge den matematik, de har lært til selvstændigt at arbejde med formulering af nye problemstillinger, og ikke mindst oplever og erfarer de, nødvendigheden af -ikke blot- at kunne men også kunne bruge matematikken kreativt, når matematiske problemstillinger kan anskues på forskellige måder.
Derfor er svaret ganske lige til: Eleverne skal lære om moddeller og om matematisk modelbygning, fordi modelbygning giver anledning til nogle hensigtsmæssige arbejdsformer, hvor eleverne får øje på samt forståelse og erfaringer med de sider af faget matematik, hvor matematik bruges til at beskrive praktiske eller konkrete sammenhænge.
At arbejde med modeller er en god måde at lære matematik på.

Arbejdet med modelbygning omfatter ikke kun en matematisk beskrivelse af et problem. Under den efterfølgende simulering med den udviklede matematiske model er det vigtigt, at eleverne oplever nødvendigheden af overvejelser om og vurderinger af modellens troværdighed. Hvor sikker eller usikker er modellen? Hvor realistisk er de resultater, modellen angiver?. Er det således, at modellen er forenklet i en sådan grad, at alt for mange væsentlige faktorer er udeladt?
Det var alt sammen nogle forhold Theis og Stig også måtte tage stilling til, da de fandt frem til, at det kunne godt lade sig gøre for Stig at forbrænde energiindholdet i krydderbollen på cykelturen til skole, hvis han cykler med godt 300 km i timen.