16 opgaver,

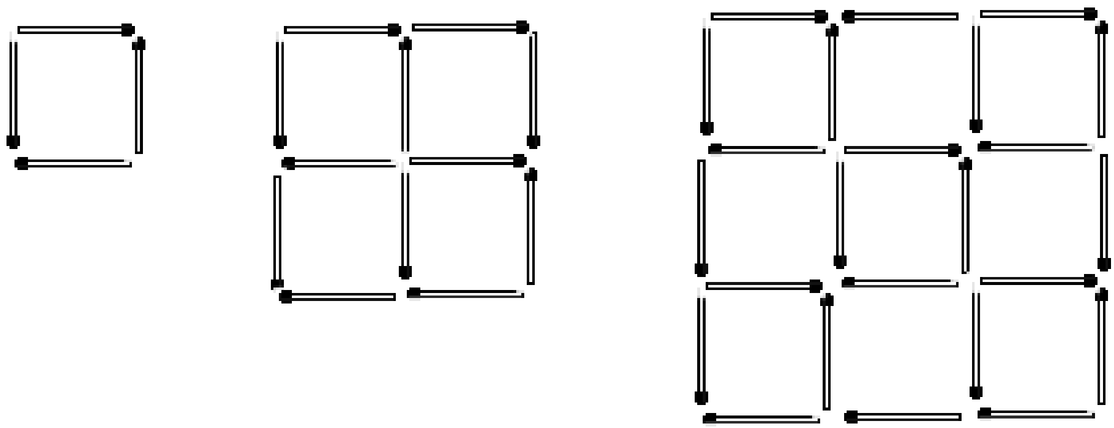
hvor arbejdet med funktionsbegrebet er centralt og hvor det er oplagt at inddrage it

Tanker bag opgaverne

Det er min erfaring, at elever umiddelbart vælger at bruge det implicitte funktionsbegreb, når de støder på en sammenhæng, der skal matematiseres (beskrives ved hjælp af en formel eller funktion). Det er sjældent, at eleverne har de fornødne sproglige forudsætninger for at formidle deres tanker mundtligt. Deres mulighed for at nedfælde disse tanker på papir er da heller ikke tilstede.

Det er mine erfaringerne, at regneark er vanskeligt at anvende for elever. Én af årsagerne hertil kan være elevernes manglende kendskab til eksistensen af og erfaring med implicitte metoder til beskrivelsen af sammenhænge.

Jarmal sidder og kæmper med tændstikopgaven fra Matematiklærerforeningens vejledende prøvesæt.



På baggrund af konkrete eksperimenter finder han frem til sammenhængen på tabelform:

Sidelængde i kvadrat	Antal tændstikker
1	4
2	12
3	24
4	40
5	60
6	
7	

Af tabellen kan han se, at det ser ud som om, at det næste tal kan findes ved at tage det tal der står ovenover og lægge forskellen mellem de to foregående tal til og endelig lægge 4 til.

Det er første gang Jarmal arbejder med denne type problemer og derfor får han lidt hjælp til at beskrive disse tanker på en matematisk form:

$$x_n = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 4$$

Senere finder han på en anden metode: " Hvis man fx skal finde hvor mange tændstikker man skal bruge i et kvadrat med sidelængden 5 tændstikker, skal man sige 2 · 5 · 6, og hvis man skal finde hvor mange tændstikker, man skal bruge i et kvadrat med sidelængden 6 tændstikker, skal man sige 2 · 6 · 7". Jarmal har netop løst opgaven med en iterativ tankegang.

Det er netop den iterative tankegang, der ligger bag brugen af regnearket. Derfor oplever han, at regnearket er værdifuldt for ham, fordi regnearket arbejder i overensstemmelse med hans egen logik.
I sin logbog skriver han: "I den næste kernestofperiode vil jeg gerne lære at bruge regneark".

Eleverne skal opleve regnearket som et værdifuldt stykke værktøj, og derfor er det vigtigt at eleverne oplever, at regnearket kan være en hjælp samt at det arbejder i forlængelse af eleverne egen logik. Derfor skal regnearket ikke blot bruges til at løse de opgaver, som lige så godt kunne være løst med andre redskaber (lommeregner og papir og blyant), men bruges de steder hvor det - regnearket – er overlegent i forhold til andre redskaber.

Jarmal skriver de første tal fra tabellen ind i regnearket, herefter sidde han og Patricio og forsøger at få styr på nogle formler, så regnearket selv kan klare det kedelige regnearbejde med at finde til den rette sammenhæng. Til deres store overraskelse ser de, at begge metoder giver de samme tal.
" Flemming vidste du at der skal bruges 20200 tændstikker, når sidelængden i kvadratet er 100".
Jeg viser Jarmal og Patricio, at regnearket også kan tegne diagrammer, samt den indbyggede funktion i XY-punktdiagrammet, der hedder "Tilføj tendens linje". Den hed $f(x)=2x^2 +2x$.
Jeg opfordrer Jarmal og Patricio til at tegne den funktion i funktionsprogrammet: "Funktion". Hvordan det gik ved jeg ikke, måske var det i mellemtiden blevet frikvarter.

I Jarmals arbejde med denne opgave har han kun tænkt implicit. Men han var tæt på også at have fat i den eksplicitte funktionsforskrift i den anden metode han fandt på
Det ved han bare ikke – endnu.

Jeg har forsøgt at samle nogle opgaver, der alle har kriterierne:

- opgaverne skal lægge op til elevernes eksperimenterende arbejde med praktiske undersøgelser.
- elevernes skal under arbejdet med opgaverne erfare, at tabeller er et oplagt redskab til at skabe overblik over konkrete sammenhænge, og få idéer til hvordan sammenhængene kan beskrives matematisk
- eleverne skal inddrage forskellige sider af funktionsbegrebet og eleverne skal umiddelbart kunne se en fordel i at inddrage it i form af funktionsprogram og regneark i arbejdet med opgaverne

Det forudsættes, at eleverne har kendskab til, at funktioner nogle gange nemmest beskrives eksplicit (funktioner af typen f(x)= 4x+2) og nogle gange med fordel som en implicit (funktioner af typen:
$x_n = x_{n-1}$ +4, x_1=6). Begge disse funktioner beskriver sammenhængen i opgave 4.
Den eksplicitte funktionstype er den traditionelle funktionstype (funktionsmaskinen) og den type, der anvendes i funktionsprogrammer.
Den implicitte funktionstype den type, der kendes fra arbejdet i de små klasser med at finde sammenhænge i og fortsætte talfølger (fx fibonacitallene: 1, 1, 2, 3, 5, 8,…). I en talfølge vil et givent tal i følgen kunne beskrives ved hjælp af en eller flere forgængere i talfølgen.

Der er ingen progression i opgaverne, der er meget forskellige i sværhedsgrad. Opgaverne er tænkt anvendt dels som inspiration, dels som enkeltopgaver til brug i matematikværksteder, hvor grupper af eleverne - inden for samme område - arbejder differentieret og derfor med forskellige opgave.
Med denne undervisningsform har jeg gode erfaringer med muligheder for at træne elevernes mundtlighed, når de – eleverne – skal præsentere deres arbejde for kammeraterne i klassen og kammeraterne kun har forudsætninger for at forstå den matematik, der bliver fremlagt gennem deres eget arbejde med andre opgaver.

God fornøjelse

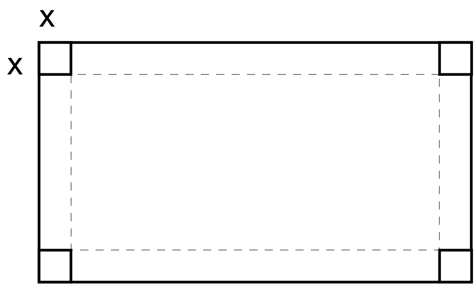
Flemming

Opgave 1 **Rumfang af æske uden låg**

I får udleveret et stykke karton med målene 20 · 30 cm. Af dette ark skal I fremstille en æske uden låg. Fra hvert hjørne kan I klippe et kvadrat med sidelængden: "x" cm og folde langs de stiplede linjer. Det er ikke nødvendigt at lave overlapninger, da æsken skal samles med tape (se tegningen herunder).

- Æsken skal have det størst mulige rumfang..
  Hvor stor skal sidelængden: x være i de små kvadrater, der klippes af?

- Hvis I skal udforme æsken af et stykke A4 papir. Hvor stor skal x så være?

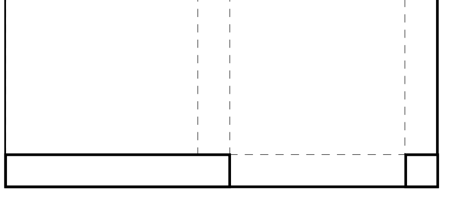


Opgave 2 **Rumfang af æske med låg**

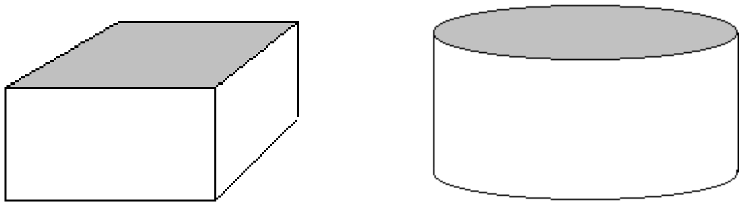
I får udleveret et ark karton, der måler 20 · 30 cm. Af dette ark skal I fremstille en æske med låg. Fra to af hjørnerne kan I klippe et kvadrat med sidelængden: "x" cm, og fra de to andre hjørner kan I klippe et rektangel, hvis ene side er x cm. og anden side er 15 cm. Herefter kan I folde langs de stiplede linjer. Det er ikke nødvendigt at lave overlapninger, da æsken skal samles med tape (se tegningen herunder).

- Æsken skal have det størst mulige rumfang..
  Hvor stor skal sidelængden: x være i de små kvadrater, der klippes af?

- Hvis I skal udforme æsken af et stykke A4 papir. Hvor stor skal x så være?



Opgave 3 **Æsker og dåser med stort rumfang og lille overflade**



Der skal fremstilles en beholder med form som en kasse uden låg med kvadratisk grundflade. Kassen skal rumme 1 liter. Kassen skal fremstilles af en dyr metalplade, hvorfor der skal bruges mindst mulig metalplade til fremstillingen af kassen. Delene til kassen klippes ud i et eller flere stykker, som svejses sammen. Derfor skal der ikke være nogle overlapninger.
For at løse denne opgave kan I benytte formlen til beregning af en kasses rumfang:

$$R = s^2 \cdot h$$

Ved indsætning af R=1000, fordi rumfanget er $1000 cm^3$, får I:

$$1000 = s^2 \cdot h,$$

der kan omskrives til:

$$h = \frac{1000}{s^2}$$

Med denne formel kan I opstille et udtryk for sammenhængen mellem overfladen af den brugte plade og højden af kassen.

$$O = 4 \cdot \frac{1000}{s} + s^2$$

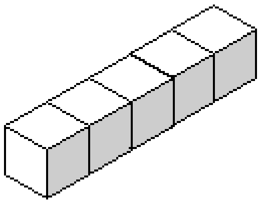
Sidelængde s i cm	4	8	12	16	20	24
s^2			144			
Overflade i cm^2			477			

Udfyld selv resten af tabellen.

- Bestem størrelsen af sidelængden og højden af en kasse med rumfanget 1 liter, når kassens overfladen skal være mindst mulig og kassen skal have kvadratisk bundflade.

- På tilsvarende vis skal I bestemme højden og radius for en beholder med form som en dåse (cylinder, der har en bund, men intet låg), når dåsen skal rumme 1 liter.

Opgave 4	**Sæt centicubes sammen til en stang, og giv den "tøj" på**

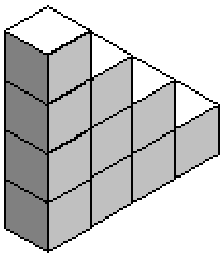


En centicube-stang vokser. Hvert år bliver den en centicube længere. Centicubestangen skal have "tøj på". Hvor stort skal centikubestangens mor sy tøjet, når centicubestangen er 1 år, 2 år, 3 år…

alder	1	2	3	4
overflade	6	10		

Udfyld selv resten af tabellen og udform en og gerne flere funktioner, der beskriver denne sammenhæng.

Opgave 5	**Byg en trappe med centicubes og giv den"tøj" på**



En centicubetrappe vokser. Hvert år bliver den en centicube "større". Centicubetrappen skal have "tøj på". Hvor stort skal centicubetrappens mor sy tøjet, når centicubetrappen er 1 år, 2 år, 3 år…

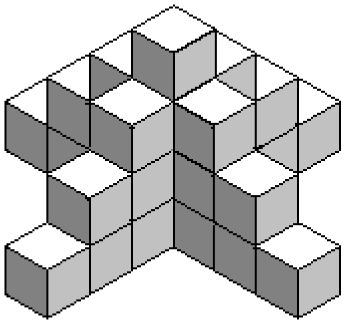
alder	1	2	3	4	5	6
rumfang	1	3	6			
overflade	6	14	24			

Udfyld selv resten af tabellen og udform en og gerne flere funktioner, der beskriver, hvordan centicubetrappen vokser.

Centicubetrappen skal ikke have tøj på "under fødderne". Hvad så?

Find selv på flere underfundigheder.

Opgave 6	**Byg et tårn med centicubes og giv det tøj på**



En centicubetårn vokser. Hvert år bliver det en centicube ”større”. Centicubetårnet skal have ”tøj på”. Hvor stort skal cencikubetårnets mor sy tøjet, når centicubetårnet er 1 år, 2 år, 3 år…

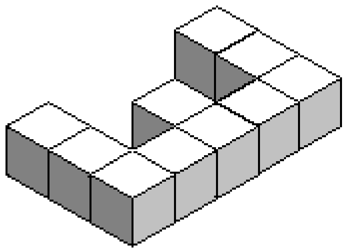
alder	1	2	3	4	5	6
rumfang	1	6	15	28		
overflade	6	26	54	90		

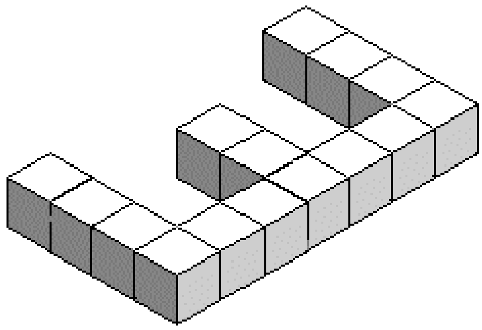
Udfyld selv resten af tabellen og udform en og gerne flere funktioner, der beskriver hvordan centicubetårnet vokser.

Centicubetårnet skal ikke have tøj på under fødderne. Hvad så?

Find selv på flere underfundigheder.

Opgave 7	**Byg et bogstav med centicubes og giv dem tøj på**





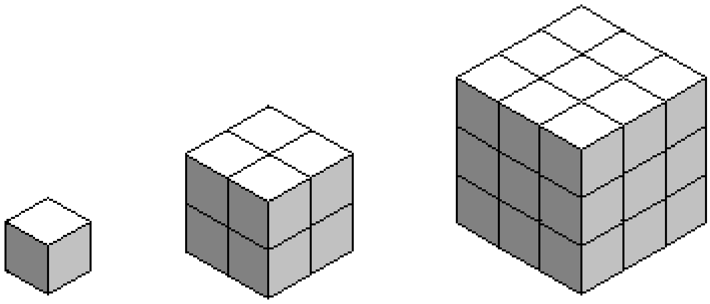
Et centicube-E vokser. Hvert år bliver den en centicube ”større”.
Centicube-E´et skal have ”tøj på”. Hvor stort skal cencikube-E’ets mor sy tøjet, når centicube-E’et er 1 år, 2 år, 3 år…

alder	1	2	3	4	5	6
rumfang	10	15	20			
overflade	42	62				

Udfyld selv resten af tabellen og udform en og gerne flere funktioner, der beskriver hvordan centicube-E’et vokser.

Prøv med nogle andre bogstaver. I kan også bruge andre bogstavtyper.

Opgave 8	**En terning af centicubes, der dyppes i maling**



En terning, der er bygget af centicubes bliver én større (på alle kanter), når den har fødselsdag.
For at fejre fødselsdagen med maner bliver den dyppet i en dåse med maling.

Hvordan er de enkelte centicube-klodser malet, og hvor mange er der af hver, når den er 1 år, 2 år, 3 år 4år ……

	malet på					kontrol	
alder	6 sider	3 sider	2 sider	1 side	0 sider	sum	alderl³
1	1		0			1	1
2	0	8	0			8	8
3	0	8	12	6	1	27	27
4	0						64
5	0						
6	0						
x							

- Udfyld selv resten af tabellen.

Opgave 9 Amalie-æsken

Amalie, Simone og Silja har lavet nogle æsker ved at folde flere forskellige stykker kvadratisk papir.

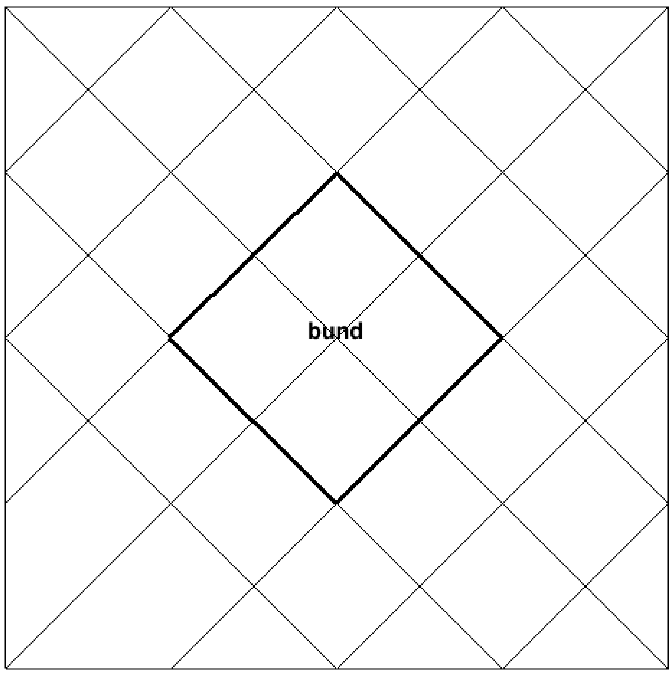
De mener, at der må være noget matematik i sådan en æske.

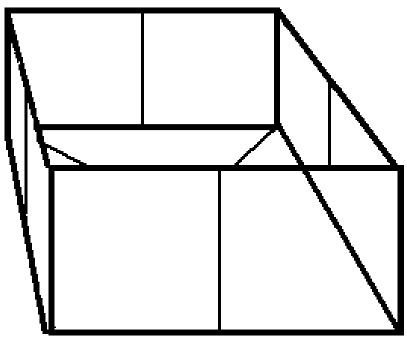
De 3 piger kan
- beregne rumfanget af de æsker de har fremstillet

- opstille en eller flere funktioner, så de kan beregne, hvor stor æsken bliver, når de bruger et stykke kvadratisk papir af en på en bestemt størrelse. De ved godt, at "stor" kan være mange forskellige ting

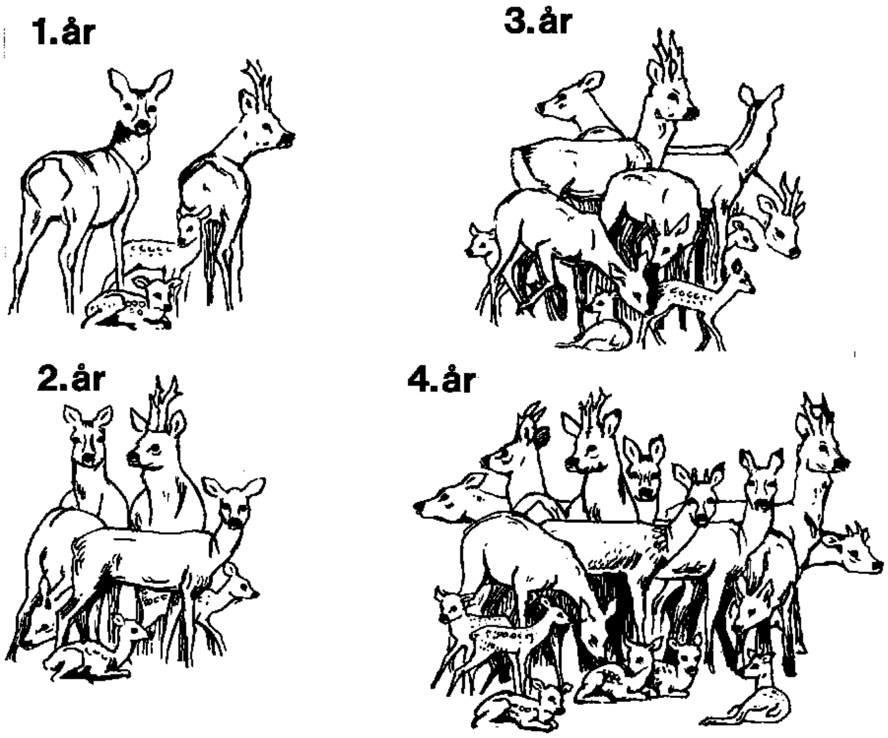
- kontrollere om deres teori og praktiske foldninger passer.

Prøv om du kan finde mere matematik i en Amalie-æske?





Opgave 10 Vækst i en rådyrpopulation



På grundlag af tegningen af rådyrene skal I forsøge at udfylde tabellen herunder.
Det forudsættes at:

- råen hvert år føder et lam af hvert køn
- dyrene er kønsmodne året efter, de selv er født. Dette betyder, at hunnerne får deres første kuld to år efter, de selv er født.
- ingen af dyrene dør af sygdom, alderdom eller sult.

år	voksne	unge	kid	antal
0	2	0	0	2
1	2	0	2	4
2	2	2	2	6
3	4			
4				
5				
6				

Udfyld selv resten af tabellen.

- Hvor mange generationer tager det, før rådyrpopulationen overstiger 1000 individer?

For et andet pelsdyr gælder næsten de samme betingelser, som for rådyret. Der er imidlertid den forskel, at dette pelsdyr først er kønsmodent efter 2 år .

Dette betyder, at hunpelsdyrene først får deres første kuld tre år efter, de selv blev født).

- Hvor mange generationer tager det, før pelsdyrpopulationen overstiger 1000 individer?

I har sikkert allerede gennemskuet, at disse modeller er helt urealistiske. I skal derfor udarbejde jeres forslag til, hvordan modellerne kan forbedres.

Opgave 11 Jettes børneopsparing

På Jettes 1 års fødselsdag indsætter Jettes forældre 1000 kr. på en bankbog. Hvor mange penge står på Jettes bankbog, når hun fylder 16 år, hvis banken giver 10% pa. i rente med årlig rentetilskrivning. Der hæves ikke af pengene i løbet af perioden?

- Udfyld resten af skemaet herunder.

år	rente	saldo
0		1000
1	100	1100
2	110	1210
3	121	1331
4		
5		
6		

- Hvor mange penge ville stå på Jettes bankbog efter de 15 år, hvis banken kun gav 6,5% i rente?
- Hvor stort et beløb skal Jettes forældre indsætte på kontoen, hvis de ønsker, at Jette skal kunne hæve 10.000 kr. på sin 16 års fødselsdag?

Jettes forældre kunne i stedet have valgt at oprette en almindelig børneopsparing, hvor de hver måned indsætter et fast beløb.

- Hvor stort et beløb kan Jette hæve på sin 16 års fødselsdag, når Jettes forældre hver måned i 15 år vil indsætte 100 kr. på en børneopsparingskonto med en forrentning på 5,5% pa.?

I finder et par vink på den næste side. Disse vink kan være en hjælp for jer, når I skal løse denne opgave.

Vink

Hvis rentefoden er 10% og du indsætter 100 kr. hver måned på en bankbog, vil de første 100 kr blive forrentet i 12 måneder (1 år). De næste 100 kr, du indsætter, vil blive forrentet i 11 måneder 11/12 år. De næste 100 kr, du indsætter, vil blive forrentet i 10 måneder 10/12 år osv.

Du kan beregne, hvor meget 100 kr. indsat på en bankbog (10% pa.) vil blive til på x måneder ved at bruge formlen:

$$k = 100 + 100 \cdot 0{,}1 \cdot x/12$$

(10% kan skrives som 0,1)

Når du skal beregne, hvor mange penge du har sparet op efter 12 måneder, når du hver måned indsætter 100 kr., skal du først beregne renten af 100 kr. for det antal måneder, der er tilbage. Til sidst skal du finde summen af renterne for hver af de 12 måneder og lægge 1200kr. til summen af renterne.

Opgave 12 Er der matematik i et korthus?

- Udfyld tabellen herunder.

etager	antal kort
1	2
2	7
3	15
4	
5	
6	
7	
x	

- Hvor højt (hvor mange etager) kan et korthus blive, hvis du har fire spil kort til at bygge korthuset af?
  Gå ud fra, at korthuset ikke vælter inden ud er færdig.

- Skriv en eller flere funktion(er) der beskriver sammenhængen mellem antal etager i et korthus og antallet af kort, der bliver brugt til korthuset.

Opgave 13 **Hastighedsmåling på Slotsherrensvej**

Lars og Tobias målte et antal bilers hastighed på Slotherrensvej.
De havde ikke adgang til en fartradar eller andet teknisk apparatur, der kan måle bilernes hastighed direkte.
Derfor valgte de at måle hvor lang tid det tog bilerne at køre 200 m.

Hastighedsbegrænsningen på Slotsherrensvej er 70 km/time

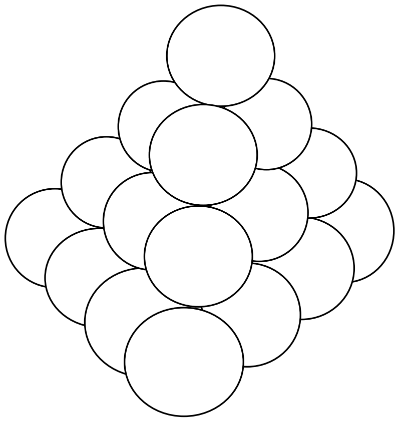
12,2	8,3	10,2	13,1	7,8	9,2	8,7	9,9
7,2	8,5	11,2	10,8	9,3	8,5	13,2	7,6
8,4	8,3	9,4	10,8	8,6	11,2	13,8	10,2
13,1	7,2	10,2	9,9	8,4	8,3	9,4	9,2
14,1	11,7	9,3	8,4	7,8	11,6	13,5	78,1
12,1	11,4	105	11,4	10,9	10,3	9,6	8,9
10,6	11,4	10,6	9,5	8,1	13,2	11,8	10,5

- Hvordan vil I foreslå, at dette talmateriale skal anvendes?

Aktuel prisliste over størrelser af fartbøder kan du finde på internettet.

Opgave 14	Stabling af kugler

I skal lægge nogle ens kugler oven på hinanden således, at kuglerne danner en pyramide. Se tegningen herunder.



Undersøg hvor mange kugler I skal bruge, hvis jeres stabel skal være 5, 6, .., 10, .., 15, ... lag højt.

- Udfyld tabellerne herunder:

lag	antal kugler
1	1
2	4
3	10
4	20
5	35
6	56
7	
8	
9	
x	

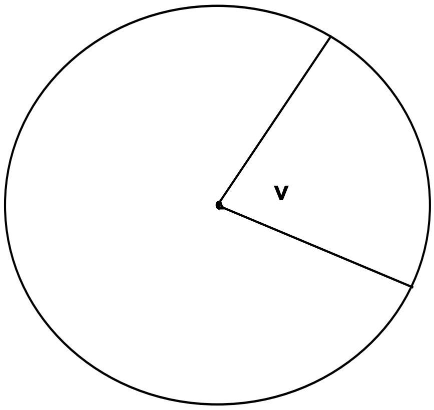
- Hvor høj kan jeres kuglepyramide blive, hvis I har 1000 kugler?

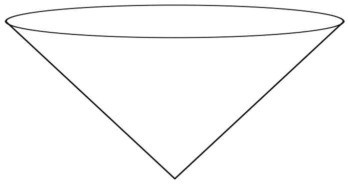
- Skriv en eller flere funktioner der beskriver sammenhængen mellem antal lag i en kuglepyramide og antallet af kugler, der bliver brugt til pyramiden.

Find selv mere matematik i kugler og stabler af kugler.

Opgave 15	Kræmmerhus

Af et stykke A4 papir skal I fremstille et kræmmerhus. For at fremstille kræmmerhuset, tegner I en cirkel på papiret med radius 10 cm. Herefter skal I klippe et udsnit i cirklen. Det er ikke nødvendigt at lave overlapninger, da kræmmerhuset skal samles med tape (se tegningen herunder).





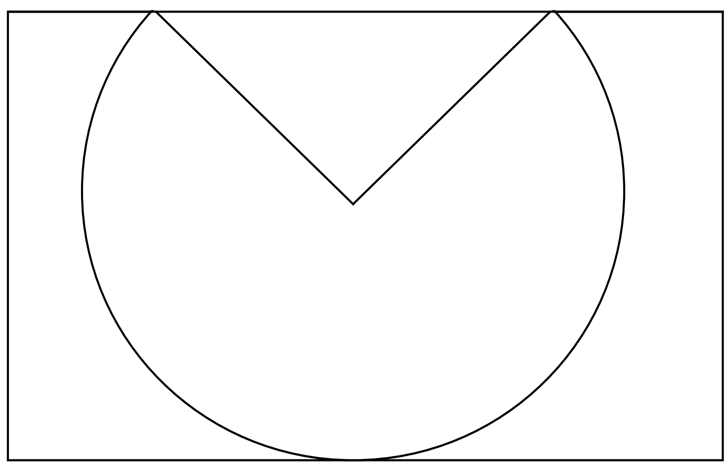
Rumfanget af kræmmerhuset bliver forskelligt afhængig af hvor stor vinklen er på udsnittet i cirklen.
Tabellen herunder er en måde, der kan benyttes, når rumfanget af kræmmerhuset skal beregnes for forskellige størrelser af udsnittet (v).

vinkel v	forhold f	omkreds af bund O	radius i bund r	pyramides højde h	pyramides rumfang
	$\frac{360 - v}{360}$	$f \cdot 2 \cdot 10 \cdot \pi$	$\frac{O}{2 \cdot \pi}$	$\sqrt{10^2 - r^2}$	$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
0,0	1,00	62,8	10,00	0,0	0,0
20,0	0,94	59,3	9,44	3,3	307,0
40,0	0,89	55,9	8,89	4,6	379,1
60,0	0,83	52,4	8,33	5,5	402,0
80,0	0,78	48,9	7,78	6,3	398,2
100,0	0,72	45,4	7,22	6,9	377,8

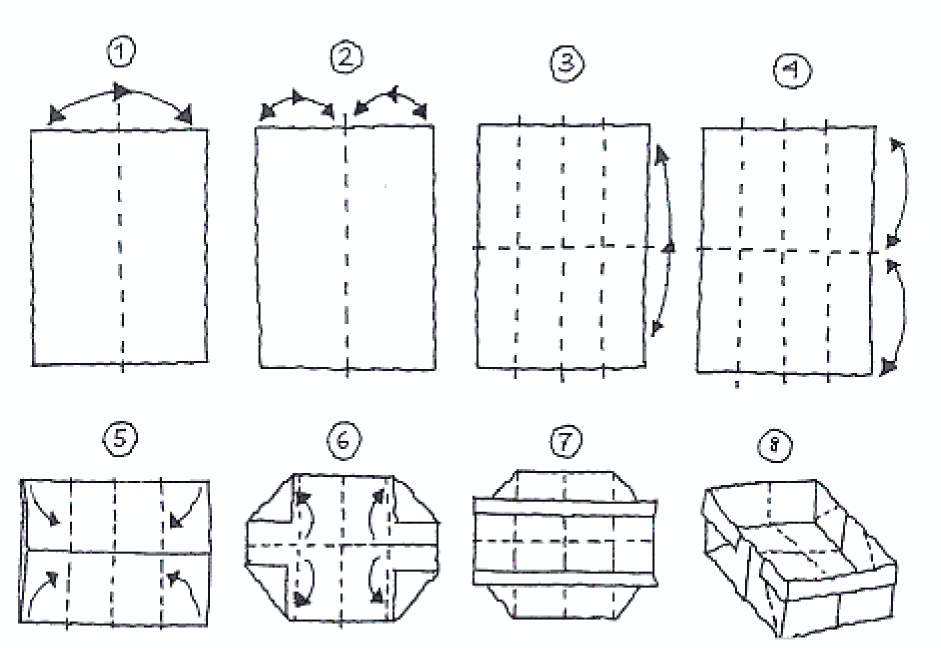
- Kræmmerhuset skal fyldes med pebbernødder (kun til randen og uden top). Hvor stor skal vinklen være i det cirkeludsnit, I klipper i cirklen, hvis I vil have flest mulige pebernødder?

- Skriv en funktion, der beskriver sammenhængen mellem vinklen (v) til cirkeludsnittet og kræmmerhusets rumfang.

- Hvordan vil I fremstille et kræmmerhus af et stykke A-4 papir, når I ønsker at fremstille et kræmmerhus med det størst mulige rumfang?



Opgave 16	En foldeæske



Af et stykke A4 papir skal du folde en æske som vist på tegningen.

- Hvor stort bliver rumfanget af æsken?

Med et passende stykke papir, kan du fremstille en æske, der kan indeholde 1 liter.

- Giv et forslag til længde og bredde på et papir, med hvilket du kan folde en æske, der kan indeholde 1 liter.